

B080 · 04184(通卡)

绝密★启用前

2021 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数(经管类)

(课程代码 04184)

注意事项:

1. 本试卷分为两部分, 第一部分为选择题, 第二部分为非选择题。
2. 应考者必须按试题顺序在答题卡(纸)指定位置上作答, 答在试卷上无效。
3. 涂写部分、画图部分必须使用 2B 铅笔, 书写部分必须使用黑色字迹签字笔。

说明: 在本卷中, A^T 表示矩阵 A 的转置矩阵, A^* 表示矩阵 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, $|A|$ 表示方阵 A 的行列式, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩。

第一部分 选择题

一、单项选择题: 本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其选出。

1. 已知 4 阶行列式 D 的某一行元素及其余子式都为 a ($a \neq 0$), 则 $D =$
A. 0 B. a^2 C. $-a^2$ D. $4a^2$
2. 设 3 阶矩阵 A 可逆, 则
A. $(A^*)^* = |A|A$ B. $(A^*)^* = |A|^2 A$ C. $(A^*)^* = |A|^3 A$ D. $(A^*)^* = |A|^4 A$
3. 设向量 α, β 长度依次为 2 和 3, 则向量 $\alpha + \beta$ 与 $\alpha - \beta$ 的内积 $(\alpha + \beta, \alpha - \beta) =$
A. 13 B. 6 C. 5 D. -5
4. 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分必要条件是矩阵 A 的
A. 列向量组线性相关 B. 列向量组线性无关
C. 行向量组线性相关 D. 行向量组线性无关
5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B 的关系为
A. 相似但不合同 B. 合同但不相似
C. 合同且相似 D. 不合同也不相似

第二部分 非选择题

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} ($i, j=1, 2$),

则 $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} =$ _____.

7. 设 3 阶矩阵 A, B 满足 $|A|=3, |B|=\frac{2}{3}$, 则 $|2AB^{-1}| =$ _____.

8. 设向量 $\alpha = (1, -2, 2, -1)^T$ 与 $\beta = (1, 1, k, 3)^T$ 正交, 则数 $k =$ _____.

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $PAP =$ _____.

10. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

11. 设 A 是 3 阶非零矩阵, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 且 $AB = O$, 则 $r(A) =$ _____.

12. 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 3)^T, \alpha_2 = (1, 1, -1)^T, \alpha_3 = (2, -4, 5)^T$, 若存在不全为零的常数

k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 则数 $a =$ _____.

13. 设 3 阶矩阵 A 的各行元素之和均为 0, $r(A)=2$, 齐次线性方程组 $Ax=0$ 通解为 _____.

14. 若矩阵 A 满足 $|E+2A|=0$, 则 A 必有一个特征值为 _____.

15. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 正定, 则 t 的取值范围为 _____.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

17. 已知向量 $\alpha = (2, 0, 1)^T$ ，求 (1) $A = \alpha\alpha^T$ ；(2) A^{2019} .

18. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，矩阵 X 满足关系式 $2X = AX - A$ ，求 X .

19. 求向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1, -1)^T$, $\alpha_2 = (2, 2, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, -1, 1)^T$, $\alpha_4 = (6, 8, 0, 3)^T$ 的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用所求的极大线性无关组表出.

20. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = a \end{cases}$$

当 a 为何值时，方程组无解？有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解（要求用其一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

22. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经正交变换 $x = Qy$ 化为标准形 $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ ，求正交矩阵 Q .

四、证明题：本题 7 分。

23. 设矩阵 A, B 满足关系式 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$ ，证明： $B + E$ 可逆，并求出 $(B + E)^{-1}$.

绝密★启用前

2021 年 4 月高等教育自学考试全国统一命题考试

线性代数（经管类）试题答案及评分参考

（课程代码 04184）

一、单项选择题：本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分。

1. A 2. A 3. D 4. B 5. C

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 0

7. 36

8. 2

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. 1

12. 32

13. $k(1, 1, 1)^T, k$ 为任意常数

14. $-\frac{1}{2}$

15. $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 解 $D = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 4 分

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 29$$
9 分

17. 解 (1) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5 分

(2) $\alpha^T \alpha = 5$

$$\begin{aligned} A^{2019} &= (\alpha \alpha^T)(\alpha \alpha^T) \cdots (\alpha \alpha^T) \\ &= \alpha (\alpha^T \alpha) (\alpha^T \alpha) \cdots (\alpha^T \alpha) \alpha^T = 5^{2018} A \end{aligned}$$
9 分

18. 解 由 $2X = AX - A$ 可得 $(A - 2E)X = A$

$$\text{由 } |A - 2E| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

故 $A - 2E$ 可逆.

从而 $X = (A - 2E)^{-1} A$ 5 分

$$(A - 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{故 } X = (A - 2E)^{-1} A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 12 \\ 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$
9 分

19. 解 对矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 进行初等行变换,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6 分

所以向量组的秩为 3,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一个极大线性无关组,

$$\alpha_4 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$$
9 分

(答案不惟一)

20. 解 对增广矩阵做初等行变换:

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \quad \cdots 4 \text{ 分}$$

(1) 当 $a \neq 1$ 时, $r(A) = 2$, $r(A, b) = 3$, $r(A) \neq r(A, b)$, 方程组无解. $\cdots 6$ 分

(2) 当 $a = 1$ 时, $r(A) = r(A, b) = 2$, 方程组有无穷多解.

$$(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故非齐次线性方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 为任意常数} \quad \cdots 9 \text{ 分}$$

21. 解 由 $|\lambda E - A| = (\lambda + 2)^2(\lambda - 7) = 0$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 7$ $\cdots 4$ 分

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 时, 解齐次线性方程组 $(-2E - A)x = 0$

$$-2E - A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 2)^T$

对应的全部特征向量 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$, k_1, k_2 是不全为零的任意常数 $\cdots 7$ 分

当 $\lambda_3 = 7$ 时, 解齐次线性方程组 $(7E - A)x = 0$

$$7E - A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 得基础解系 } \alpha_3 = (-2, 2, 1)^T$$

对应的全部特征向量 $k_3\alpha_3$, k_3 为非零任意常数 $\cdots 9$ 分

线性代数 (经管类) 试题答案及评分参考第 3 页 (共 4 页)

22. 解 二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 由题设知,

特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 4 分

当 $\lambda_1 = 5$ 时, 对应的特征向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化得 $\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 时, 对应的线性无关特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

正交化、单位化得 $\beta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 7 分

所求正交矩阵为 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ 9 分

四、证明题: 本题 7 分。

23. 证 由 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$ 可得

$$\begin{aligned} B + E &= (E + A)^{-1}(E - A) + E \\ &= (E + A)^{-1}(E - A) + (E + A)^{-1}(E + A) \\ &= (E + A)^{-1}[(E - A) + (E + A)] \\ &= 2(E + A)^{-1} \end{aligned} \quad \text{.....3 分}$$

因此 $B + E$ 可逆, 并且 $(B + E)^{-1} = \frac{1}{2}(E + A)$ 7 分