全国2021年10月高等教育自学考试线性代数(经管类)试题

课程代码:04184

1.请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

2.答题前,考生务必将自己的考试课程名称、姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔填写在答题纸规定的位置上。

选择题部分

注意事项:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题纸上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。不能答在试题卷上。

一、单项选择题:本大题共5小题，每小题2分，共10分。在每小题列出的备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其选出。

1．已知2阶行列式D的第1行元素及其余子式都为a，则D的值为

A．0　　B．a^2

C．$-a^2$　　D．$2a^2$

2．若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$均是$n$阶矩阵，且满足$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{B}^{-1}=$

A．$\boldsymbol{AC}$　　B．$\boldsymbol{CA}$

C．$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}$　　D．$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

3．设向量组$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$(a,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,b,0)^{\mathrm{T}}$线性相关，则数a,b可取值为

A．$a=0,b=0$　　B．$a=0,b=1$

C．$a=1,b=0$　　D．$a=1,b=1$

4．设非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{A}$为$m\times n$阶矩阵，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=r$，则

A．当$r=n$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有惟一解

B．当$r<n$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解

C．当$r=m$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解

D．当$m=n$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有惟一解

5．设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的关系为

A．相似且合同　　B．相似但不合同

C．不相似但合同　　D．不相似且不合同

非选择题部分

注意事项：

用黑色字迹的签字笔或钢笔将答案写在答题纸上，不能答在试题卷上。

二、填空题：本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}（$i,j=1,2$），则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}=$ __________.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 3 维列向量，且 3 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=n$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$ __________.

8. 若 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ __________.

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行互换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行加到第 1 行得到单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}=$ ________.

10. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则数 $a=$ __________.

11. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-4,5)^{\mathrm{T}}$，若仅当常数 k_1,k_2,k_3 全为零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$ 才能成立，则数 a 的取值满足__________.

12. 设3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为0，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为__________.

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似，则数 $a=$ __________.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 3 维非零列向量，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i$（$i=1,2,3$），则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=$ __________.

15. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2$ 的正惯性指数为__________.

三、计算题：本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+\frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+\frac{1}{4} \end{vmatrix}$ 的值.

17. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足关系式 $6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{XA}$，求 $\boldsymbol{X}$.

19. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,-3,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(6,17,-9,-9)^{\mathrm{T}}$，求该向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表出.

20. 求线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=4 \\ -x_1+4x_2+x_3=16 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$ 的通解（要求用它的一个特解和导出组的基础解系表示）.

21. 判定矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ 能否相似于对角矩阵，说明理由.

22. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形.

四、证明题：本题 7 分。

23. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1, λ_2 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

答案：

一、单项选题:本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分

1.A　2.B　3.D　4.C　5. A

二、填空题:本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

6. 0　　7. -m-n　　8.30　　9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. -2　　11. $a\neq 32$　　12. $k(1,1,1)^T$　　13. 3

14. 3　　15. 3

三、计算题:本大题共 7 小题，每小题 9 分，共 63 分。

16. $$\begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+\frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+\frac{1}{3} & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+\frac{1}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 9 & 16 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{24}\begin{vmatrix} 2+4+9+16 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{31}{24}$$

17. $$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA + B^T = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

18. 由 $6A+X=XA$ 可得 $X(A-E)=6A$

由 $A-E=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 得 $|A-E|=6\neq 0$ 故 $A-E$ 可逆

从而 $X=6A(A-E)^{-1}$.

$$(A-E)^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$，因此 $X=\begin{pmatrix}6&3&0\\-2&6&0\\0&0&12\end{pmatrix}$

19. 由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&-1&6\\2&5&-1&17\\-1&-3&1&-9\\-2&-3&2&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

因此向量组的秩为 3，一个极大无关组是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$\alpha_4=2\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_3$（答案不唯一）

20. 对非齐次线性方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\-1&4&1&16\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&4&4\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

得同解方程组 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=-x_3+4\end{cases}$，由此得到非齐次线性方程组的特解

$\eta^*=(0,4,0)^T$，导出组的一个基础解系为占 $\xi=(-3,-1,1)^T$

从而线性方程组的通解为 $x=k\xi+\eta^*$，其中 k 是任意常数

21. 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\0&\lambda-2&-1\\0&4&\lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，由于 r(OE-A)=2，

所以 A 的属于 2 重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的线性无关特征向量只有 1 个，故 A 不能与对角矩阵相似

22. 解：二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，由题设知，

特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，方程组 $(-E-A)x=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

正交化、单位化得 $\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=5$ 时，方程组 $(5E-A)x=0$ 的基础解系为

$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，

作正交变换 x=Qy 得标准形 $f=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$

四、证明题:本题 7 分。

23. 证 设存在常数 k_1,k_2 使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$ ①

用 A 左乘①的两边，得

$A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2=0$

已知 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，$A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，上式化为

$k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0$ ②

由② $-\lambda_2\times$ ①得 $k_1(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1=0$，又 $\lambda_1\neq\lambda_2$，$\alpha_2\neq0$，则 $k_1=0$；

将 $k_1=0$ 代入①式得 $k_2\alpha_2=0$，又 $\alpha_2\neq0$，推出 $k_2=0$

所以 α_1, α_2 线性无关